LDR 1. ŘÁDU ve tvaru $y' + p(x)y = q(x)$ (L1)
kde $p, q \in C(a,b)$.

Lemma 2.46: (i) y je řešení (L1) na (a,b), pak $y \in C^1(a,b)$

(ii) $L: C^1(a,b) \to C(a,b)$, def. předpisem
$L(y) = y' + py$, je lineární.

Poznámka: Množina všech řešení (max.) rce

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (H)$$

je $\{y \in C^1(a,b) : y' + py \equiv 0\} =$
$= \{y \in C^1(a,b) : L(y) = 0\}$
$= Ker(L)$.

Tvrzení: Jsou-li X, Y vektorové prostory, $L: X \to Y$ je lineární, pak $Ker(L)$ je vektorový podprostor Y.

Dk: $Ker(L) \subseteq X$. Protože X je VP, stačí ověřit že $Ker(L)$ je uzavřená na vektorové operace.
nechť $u, v \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ (typicky $\mathbb{R}$),
nechť $u, v \in Ker(L)$.

$$L(\underbrace{\alpha u + \beta v}) = \alpha L(u) + \beta L(v) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Tedy $\hookrightarrow \in Ker(L)$. $\square$

To znamená, že $\{y \in C^1(a,b) : y$ řeší (H)$\}$ je VPP $C^1(a,b)$.

Věta 2.47 Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a<b$, $p,q \in C(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno **max.** řešení y rovnice (L1) splňující P.P. $y(x_0) = y_0$.

Navíc toto řešení je definováno na celém (a,b).

---

metody řešení rce (L1): $y' + py = q$

1) Variace konstanty (H) $y' + py = 0$

2) Integrační faktor

---

1) nejprve (H) obecně.

$$C \rightsquigarrow C(x) \qquad [\text{„Variace } C\text{"}]$$

V příslušném tvaru řešíme (L1).

2) Metoda IF: rovnici přenásobíme vhodnou funkcí (faktorem) tak, aby L.S. byla derivace součinu

$$\left[\quad [f \cdot g]' = f'g + fg' \quad \right]$$

$$y' + py = q \qquad / e^P$$

---

najdeme PF P k fci p. Čili $P' = p$ na (a,b).

$$\text{I.F.} = e^{P(x)}$$

$$\underbrace{y' e^P}_{f'g} + \underbrace{e^P \cdot p \cdot y}_{g' \cdot f} = q e^P$$

$$(y \cdot e^P)' = q e^P \qquad / \int \dots dx$$

Příklad: $y' + 5y = 7x$

$$p(x) \equiv 5 \Rightarrow P(x) = 5x \Rightarrow IF = e^{5x}$$

$$y' e^{5x} + y \cdot 5e^{5x} = 7x e^{5x}$$

$$(y \cdot e^{5x})' = 7x e^{5x} \quad / \int \dots dx$$

$$y \cdot e^{5x} \overset{c}{=} \int 7x e^{5x} dx =: I$$

$$I = 7 \int x e^{5x} dx = 7 \cdot \left[\frac{1}{5} x e^{5x} - \int 1 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} dx \right]$$

$$= \frac{7}{5} x e^{5x} - \frac{7}{25} e^{5x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y = \frac{7}{5} x - \frac{7}{25} + C e^{-5x}.$$

2.9. LDR vyšších řádů

$$(L_n) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

Tyto koeficienty jsou prostě čísla.

Předp., že $f \in C(a,b)$ $(a, b \in \mathbb{R}^*, a < b)$.

Rce je homogenní $f \equiv 0$ (značíme (H_n))

Lemma 2.49: (i) Každé řešení (L_n) je C^n.

(ii) $L: C^n(a,b) \longrightarrow C(a,b)$, def. předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y,$$

je lineární.

Pozn.: $L: \overset{\text{fce} \in C^n}{y} \longmapsto$ L.S. rce (L_n).

Důkaz: y řešení (L_n) na (a,b). Pak

$$y^{(n)}(t) = f(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - a_{n-2}y^{(n-2)}(t) - \dots - a_1 y'(t) - a_0 y(t) \quad (*)$$

Protože $y^{(n)}(t) \in \mathbb{R}$ $(t \in (a,b))$, $\boxed{y^{(n-1)}}$ je spoj. v bodě t $(t \in (a,b))$. Podobně i všechny nižší derivace y jsou spoj. na (a,b).

Navíc $f \in C(a,b)$, takže P.S. $(*)$ určuje spoj. fci (aritmetika spoj. – 1. SEM.).

Tj. L.S. $(*)$ je spoj. Tedy $y \in C^n(a,b)$.

(ii) Zde jde o to uvědomit si, že zobrazení

$$y \in C^k(a,b) \longmapsto y^{(k)} \in C(a,b)$$

je lineární pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Tj. skutečně platí: $\forall k \in \mathbb{N}$: $\forall f,g \in C^k$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta \cdot g^{(k)}.$$

Indukcí: $k=1$ víme

$k \to k+1$: $(\alpha f + \beta g)^{(k+1)} =$

$$= \left((\alpha f + \beta g)'\right)^{(k)} = (\alpha f' + \beta g')^{(k)} \overset{\text{I.P.}}{=}$$

$$= \alpha (f')^{(k)} + \beta (g')^{(k)} = \alpha f^{(k+1)} + \beta g^{(k+1)}$$

Z toho snadno plyne (ii). $\square$

Věta 2.50: (Existence a jednoznačnost řeš. (Ln))
Nechť $f \in C(a,b)$, $t_0 \in (a,b)$, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Pak existuje právě jedno max. řešení y (Ln) splňující P.P.:
$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$
Navíc toto řešení je def. na celém (a,b).

Pozn.: V2.50 pro $n=1$ nenahrazuje V2.47, protože tato věta (2.47) připouští i nekonstantní koeficient: (L1) $y' + py = q$

fce, ne nutně konst.

L ... operátor levé strany (Ln) je lineární podle L2.49.

$\{y \in C^n(a,b) : y \text{ řeší } (H_n)\} =$
$= \{y \in C^n(a,b) : L(y) = 0\}$
$= \operatorname{Ker}(L)$ je VPP $C^n(a,b)$.

Věta 2.53: Je dána rce (Ln) a přísl. (Hn). $\operatorname{Ker}(L)$ má dimenzi n.

Nechť y_p je nějaké („partikulární") řešení (Ln). Pak množina všech max. řešení (Ln) je:
$$\{y_p + y_h : y_h \text{ je řešení } (H_n)\} = y_p + \operatorname{Ker}(L).$$

Pozn. 2.54: Rovnici (Ln) můžeme řešit ve 2 krocích:

(i) najdeme y_p. (Může být problém)

(ii) najdeme všechna řešení (Hn). (Alg.)

Pak každé řešení (Ln) je tvaru $y_p + y_h$, kde y_h řešení (Hn).

Pozn.: Jsou-li y_1, y_2 řešení (Ln), pak $y_1 - y_2$ je řešení (Hn).

Dk: $L(y_1) = f$ (protože y_1 řeší (Ln))

$L(y_2) = f$ (— " — y_2 — " —)

Pak $L(\underbrace{y_1 - y_2}) = L(y_1) - L(y_2) = f - f = 0$

Tj. $\hookrightarrow$ je řešení (Hn).

Důkaz: $L: C^n(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$ je lineární,

$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$.

Víme (L2.49) řešení (Hn) jsou $\in C^n(\mathbb{R})$.

Přesněji, V2.50 garantuje, že max. řešení (Hn) jsou def. na celém $\mathbb{R}$.

Z linearity L víme, že množina všech řešení (Hn) je $\mathrm{Ker}(L)$, což je podprostor $C^n(\mathbb{R})$. Chceme: $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = n$.

V2.50: $\rightsquigarrow$ max. řešení $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^n(\mathbb{R})$ splňující P.P.: [zde $t_0 = 0$]

$$
\begin{array}{llll}
y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \dots & y_n(0) = 0 \\
y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & \ddots & y_n'(0) = 0 \\
\vdots & y_2''(0) = 0 & & \vdots \\
 & \vdots & & y_n^{(n-2)}(0) = 0 \\
y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & & y_n^{(n-1)}(0) = 1
\end{array}
$$

Triv. pozorování: $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou různá.

jsou LNZ: nechť $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ splňující

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0. \quad (*)$$

Chceme: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Dosadíme $t = 0$.

$$c_1 \underbrace{y_1(0)}_{1} + c_2 \underbrace{y_2(0)}_{0} + \dots + c_n \underbrace{y_n(0)}_{0} = 0$$

$$c_1 + 0 + \dots + 0 = 0. \implies \boxed{c_1 = 0}$$

Zderivujme $(*)$: Dosadíme $t = 0$:

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n' = 0$$

$$c_1 \underbrace{y_1'(0)}_{0} + c_2 \underbrace{y_2'(0)}_{1} + \dots + c_n \underbrace{y_n'(0)}_{0} = 0$$

$$c_2 = 0 \qquad \boxed{c_2 = 0}$$

Podruhé zderivujeme $(*)$ ... Nakonec, v $(n-1)$-ním kroku:

nechť $i \in \{1, \dots, n\}$ je lib.

$$c_1 \underbrace{y_1^{(i)}(0)}_{0} + c_2 \underbrace{y_2^{(i)}(0)}_{0} + \dots + c_n \underbrace{y_n^{(i)}(0)}_{1} = 0$$

$$\dots 0 + 1 \implies \boxed{c_n = 0}$$

Tedy $y_1, \dots, y_n$ jsou LNZ.

Chceme: $\{y_1, \dots, y_n\}$ generuje $\mathrm{Ker}(L)$.

Zvolme tedy $w \in \mathrm{Ker}(L)$ libovolné.

$c_1 := w(0)$ [: $c_1 y_1(0) = c_1 \cdot 1 = w(0)$]

$c_2 := w'(0)$

$\vdots$

$c_n := w^{(n-1)}(0)$. Definujeme $y := \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$

Pak $y(0) = w(0)$, $y'(0) = w'(0)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(0) = w^{(n-1)}(0)$.

$$y(0) = c_1 \underbrace{y_1(0)}_{1} + c_2 \underbrace{y_2(0)}_{0} + \dots + c_n \underbrace{y_n(0)}_{0} =$$

$$= c_1 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = c_1 = w(0)$$

$$y'(0) = c_1 \underbrace{y_1'(0)}_{0} + c_2 \underbrace{y_2'(0)}_{1} + \dots + c_n \underbrace{y_n'(0)}_{0} =$$

$$= c_2 \cdot 1 = w'(0) \qquad \text{ATD.}$$

Tedy shrnutí: w, y jsou max. řešení (H_n) splňující P.P. $y(0)=c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_n$.

Podle V2.50 ale existuje právě jedno max. řešení tyto podmínky splňující.

Tedy $y = w$.

Tedy $w = y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$.

$\langle \{y_1, \dots, y_n\} \rangle = \operatorname{Ker} L$

Tedy $\{y_1, \dots, y_n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker}(L)$ všech max. řešení rce (H_n).

Tedy $\dim(\operatorname{Ker}(L)) = n$.

2. část věty tvrdí, že $A = B$, kde

$$A := \{ y_p + y_h : y_h \text{ max. řešení } (H_n) \}$$

y_p – pevné.

$$B := \{ y : y \text{ je max. řešení } (L_n) \}$$

<u>$A \subseteq B$</u>: Nechť y_h je řešení (H_n) libovolné (pak $y_p + y_h \in A$ je lib. prvek A).

<u>Chceme</u> $y_p + y_h \in B$, tj. $y_p + y_h$ řeš. (L_n).

Prostě dosadíme do (L_n): y_h řeší $(H_n) \Rightarrow 0$

$$L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = f + 0 = f$$

Tedy $y_p + y_h \in B$. y_p řeší $(L_n) \Rightarrow f$. Tedy $y_p + y_h$ ř. (L_n)

$\underline{B \subseteq A}$: nechť $y \in B$ (čili y je max. ř. (Ln)).

Chceme: $y \in A$.

Připomeňme, že $f \in C(a,b)$. Tedy uvažovaná max. řešení (Ln) jsou def. na (a,b).

Čili $y \in C^n(a,b)$.

Dále (ze znění věty) máme $y_p \in C^n(a,b)$.

Položme $\boxed{\tilde{y}_h := y - y_p}$; pak $\tilde{y}_h$ řeší (Hn).

Skutečně $L(\tilde{y}_h) = L(y - y_p) =$

$= L(y) - L(y_p) = f - f = 0$.

Ovšem $\tilde{y}_h$ je def. pouze na (a,b).

Prodlužme řeš. $\tilde{y}_h$ na max. řeš. rce (Hn) y_h.

Pak $y = \underbrace{y_p + \tilde{y}_h}_{} = y_p + y_h \in A$

$\left[\begin{array}{c} \text{def. na } (a,b), \\ y_h|_{(a,b)} = \tilde{y}_h \end{array} \right]$ max. řeš. (Hn) $\Uparrow$

Poznámka 2.55:

- Pokud $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou LNZ ř. (Hn), pak $\{y_1, \dots, y_n\}$ je báze prostoru ř. (Hn).
- Každou bázi ↗ nazýváme FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM rovnice (Ln) resp. (Hn)

Tedy „najít všechna max. ř. (Hn)" ≡

≡ „najít FS lé rce"

CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM rce (H_n):

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

je polynom v proměnné λ:

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Pokud λ je kořen χ, pak $e^{\lambda t}$ řeší (H_n).

Příklad: $y'' - y = 0 \quad \Big| \quad y'' = y$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -1$$

Tedy fce $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$ jsou řešení naší rovnice.

Dodatek: Obecné řešení rce je $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Pozorování 2.56: $\Rightarrow$ y_1, y_2 jsou LNZ.

Tedy $\{y_1, y_2\}$ je FS naší rce.

Náznak důvodů pro fungování algoritmu:

Zkusíme dosadit do (H_n) za y funkci $y(t) = e^{\lambda t}$. $\quad y^{(i)}(t) = \lambda^i e^{\lambda t}$.

Tedy L.S. (H_n) je tvaru

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t} \cdot \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right)$$

$$= e^{\lambda t} \cdot \chi(\lambda) \quad \equiv 0 \quad \iff$$

$$\iff \chi(\lambda) = 0.$$

ALGORITMUS:

1) je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ k-násobný kořen χ, pak do FS zařaď fce

$$\underbrace{e^{\lambda t},\ t\cdot e^{\lambda t},\ t^2\cdot e^{\lambda t},\ \dots,\ t^{k-1}\cdot e^{\lambda t}}_{k \text{ LNZ fcí}}$$

$[i=\sqrt{-1}]$

2) je-li $\lambda = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b>0$, k-násobný kořen χ

(pak také $\overline{\lambda} = a-bi$ je k-nás. kořen χ),

do FS zařaď fce

$$\left.\begin{array}{l} e^{at}\cdot\cos bt,\ e^{at}\sin bt, \\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\sin bt,\ \dots \\ \vdots \\ t^{k-1}e^{at}\cos bt,\ t^{k-1}e^{at}\sin bt. \end{array}\right\} \text{2k LNZ funkcí}$$

Věta 2.61: (Speciální P.S. rce (Ln))

$\mu,\nu\in\mathbb{R}$, P,Q polynomy nechť P.S. (Ln)

$$f(t) = e^{\mu t}\big(P(t)\cos(\nu t) + Q(t)\sin(\nu t)\big).$$

Pak existuje („partikulární") řešení (Ln) ve tvaru

$$y_p(t) = t^m e^{\mu t}\big(R(t)\cos(\nu t) + S(t)\sin(\nu t)\big), \text{ kde}$$

R,S jsou stupně $\le \max(st(P), st(Q))$ a

m je násobnost čísla $\mu + \nu i$ jakožto kořene

χ (char. polynom (L_n)).